数論的 Teichmüller 理論

望月新一（京大数理研）

http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki
「出張・講演」

§1. IU 幾何の理念

§2. リーマン面の一意化の幾何と固有束

§3. p 進 Teich 理論における Frob 持ち上げ

§4. 楕円曲線付き数体上の絶対遠アーベル幾何

§5. エタール Θ 関数による標準持ち上げ

§1. Inter-Universal（宇宙際）幾何の理念

数論幾何的設定において登場する特定のスキーム等を問題にするのではなく、そのスキームたち等を統制する

抽象的組合せ論的パターン

を主役として考える。

基本的な例 :（一言でいうと）「圏」

(i) ガロア圏

(ii) log 幾何に出てくる モノイド

(iii) （stable curve 等から生じる）グラフ

具体的活用方法そのI : 数体の異なる素点での幾何等、スキーム論＝環論では直接的に「連絡不可能」な幾何の間の 連絡を実現する ために使う。

初等的な例 : $p \neq l$ のとき $\mathbb{F}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_l$ がなくても、

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_p) \cong \widehat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_l)$$

もっと規模の大きな例 : §2, §3 で取り上げる

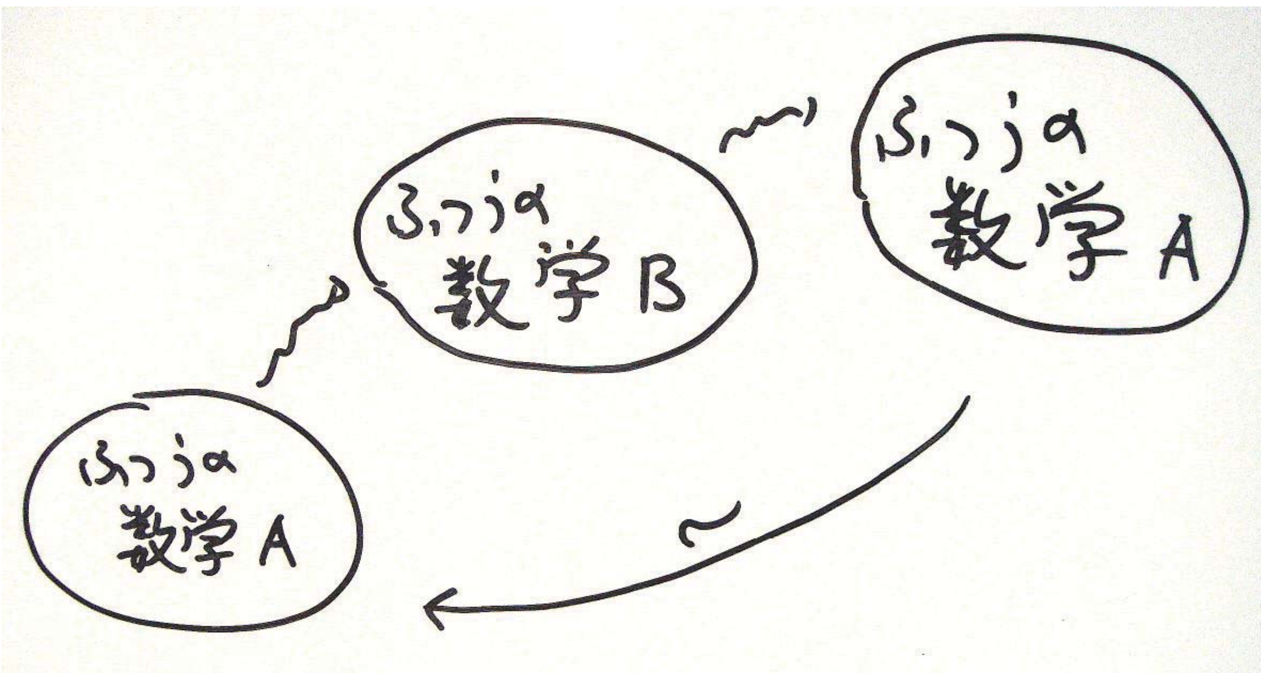
複素 Teich 理論 と p 進 Teich 理論

の関係。更には、§4, §5 で解説する

IU Teich 理論 と p 進 Teich 理論

との関係。

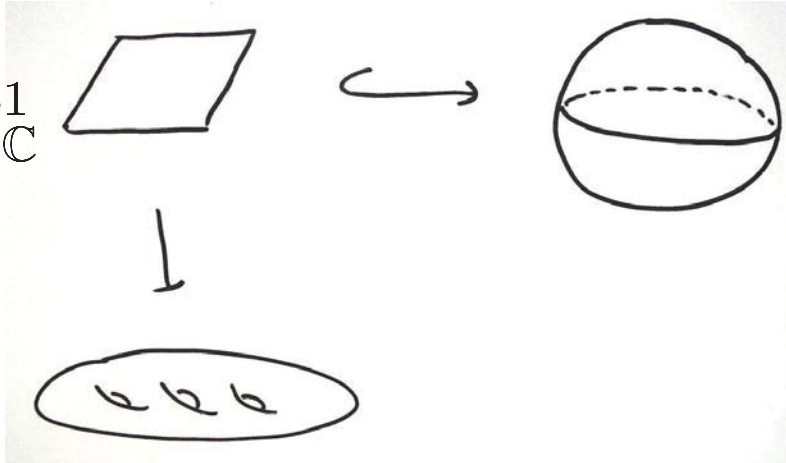
具体的活用方法その II :「普通の数学的設定」を ユークリッド空間 に対応するものと見て、位相多様体 ＝「局所的には普通の数学的設定だが大域的にはそうではない」設定を構成するため、つまり、「ループ」を作るために使う。(§5 を参照。)



§2. リーマン面の一意化の幾何と固有束

双曲的なリーマン面 $\mathbb{X}$ の普遍被覆 $\widetilde{\mathbb{X}}$ は上半平面 $\mathbb{H}$ に正則に同型である（Koebe）。

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{\mathbb{X}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \\ \downarrow & & & & \\ \mathbb{X} & & & & \end{array}$$



これにより「セクション＋接続付き $\mathbb{P}^1$-束」

$$(\mathbb{P} \to \mathbb{X}, \nabla_{\mathbb{P}}, \sigma : \mathbb{X} \to \mathbb{P})$$

が $\mathbb{X}$ 上にできる。しかも「KS 射」$\nabla_{\mathbb{P}}(\sigma)$ は同型になる。このように「微分が同型となるような (Hodge) section を持つ接続付き $\mathbb{P}^1$-束」を固有束と呼ぶ。(g, r) 型の双曲的リーマン面の（複素解析的）モジュライ・スタックを $\mathcal{M}$ と書くと、固有束のモジュライはその上の $3g - 3 + r$ 次元アフィン束

$$\mathcal{S} \to \mathcal{M}$$

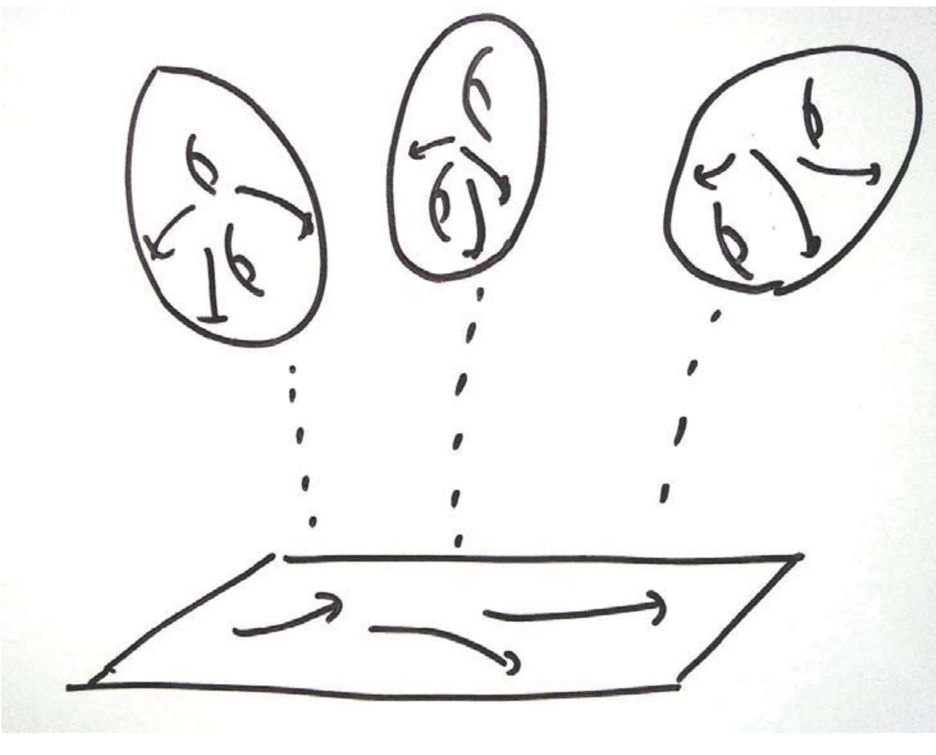
を定める。

一方、一意化から作った「特別な固有束」は実解析的な 標準的セクション

$$s : \mathcal{M} \to \mathcal{S}$$

を定める。$\overline{\partial} s$ は、$\mathcal{M}$ 上の $(1,1)$ 形式となり、Weil-Petersson 計量 という有名な Kähler 計量と一致する。

この WP 計量や上半平面上の Poincaré 計量から生ずるリーマン面上の計量は、リーマン面やそのモジュライ空間の上に 測地線の幾何 を発生し、また積分することによって 標準的座標 を定義する。この座標は、単位円板の場合には、「普通の座標 z」となり、モジュライ空間の場合には、Bers 座標 となる。



§3. p 進 Teich 理論における Frob 持ち上げ

「双曲的代数曲線」もその上の「固有束」という概念も完全に 代数的 であるため、§2 の

$$\mathcal{S} \to \mathcal{M}$$

は実は $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ や $\mathbb{Z}_p$ あるいは $\mathbb{F}_p$（$p \neq 2$）の上でも自然に定義される。

標数 p では「p 曲率が平方ベキ零になる」という自然な条件（＝「Frob に関して不変」に由来する）を課すと

$$\mathcal{N}_{\mathbb{F}_p} \subseteq \mathcal{S}_{\mathbb{F}_p} \to \mathcal{M}_{\mathbb{F}_p}$$

という閉部分スタックができる。合成射

$$\mathcal{N}_{\mathbb{F}_p} \to \mathcal{M}_{\mathbb{F}_p}$$

は finite flat で次数は p^{3g-3+r} となる。つまり、「被覆のようなもの」である。$\mathcal{N}_{\mathbb{F}_p}$ の上では、Frob による曲線 X の二次微分

$$\Gamma(X, \omega_X^{\otimes 2})$$

への 自然な作用 があるが、この作用が 同型 となるものを ordinary と呼ぶ。

その locus $\mathcal{N}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{ord}} \subseteq \mathcal{N}_{\mathbb{F}_p}$ は開部分スタックとなるが、$\mathcal{M}_{\mathbb{F}_p}$ 上 étale となるため、自然な p 進的（かつétale な）持ち上げ

$$\mathcal{N}_{\mathbb{Z}_p}^{\mathrm{ord}} \to \mathcal{M}_{\mathbb{Z}_p}$$

を定める。この持ち上げの上では、複素数体の場合と類似的な理論が展開される。

定理：自然な Frob 持ち上げ

$$\Phi_{\mathcal{N}} : \mathcal{N}_{\mathbb{Z}_p}^{\mathrm{ord}} \to \mathcal{N}_{\mathbb{Z}_p}^{\mathrm{ord}}$$

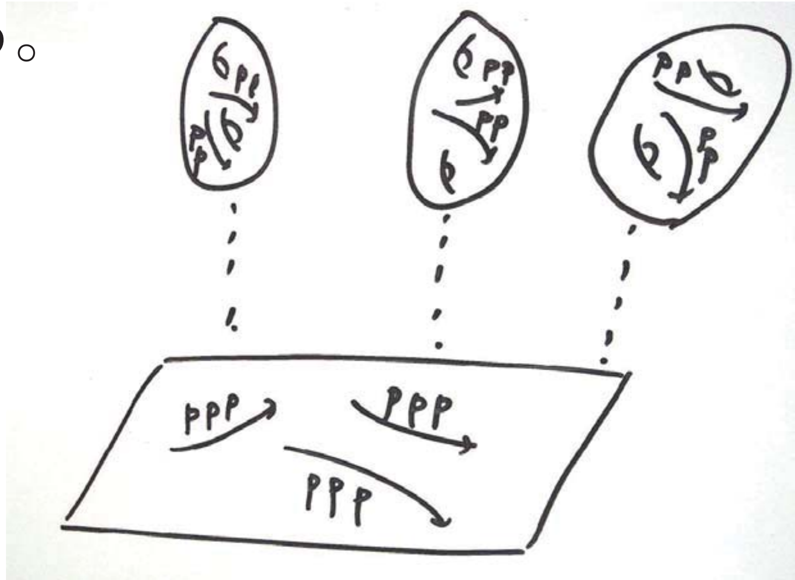
と、$\Phi_{\mathcal{N}}$ と 両立的なセクション

$$\mathcal{N}_{\mathbb{Z}_p}^{\mathrm{ord}} \to \mathcal{S}_{\mathbb{Z}_p} \to \mathcal{M}_{\mathbb{Z}_p}$$

が存在し、また $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}_p}^{\mathrm{ord}}$ 上の 普遍的な曲線 $\mathcal{X}$ の ordinary locus $\mathcal{X}^{\mathrm{ord}}$ の上でも $\Phi_{\mathcal{N}}$ と両立的な Frob 持ち上げ $\Phi_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}^{\mathrm{ord}} \to \mathcal{X}^{\mathrm{ord}}$ が存在する。

この $\Phi_{\mathcal{X}}$, $\Phi_{\mathcal{N}}$ はそれぞれ Poincaré 計量 と WP 計量 に対応している。

一般にFrob 持ち上げはKähler 計量に対応している。「Frob 持ち上げを施す」という操作は、「Kähler 計量の測地線に沿って流す」という操作に対応していて、またFrob 持ち上げを積分することによって 標準的な座標ができる。



なお、有理点 $\in \mathcal{N}^{\mathrm{ord}}_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_q)$ ＝「ベキ零な ord 固有束付き双曲的曲線」$(X_{\mathbb{F}_q}, P_{\mathbb{F}_q})$ から出発すると、Frob 持ち上げによって 標準的な持ち上げ

$$(X, P)/W(\mathbb{F}_q)$$

が定まる。この X の ord locus 上に標準的持ち上げ $\Phi_{\mathcal{X}}$ の制限が働く。§4, §5 では、楕円曲線（$\leftrightarrow P_{\mathbb{F}_q}$）付き 数体（$\leftrightarrow X_{\mathbb{F}_q}$）に対するこれらの対象の類似物を取り上げる。

§4. 楕円曲線付き数体上の絶対遠アーベル幾何

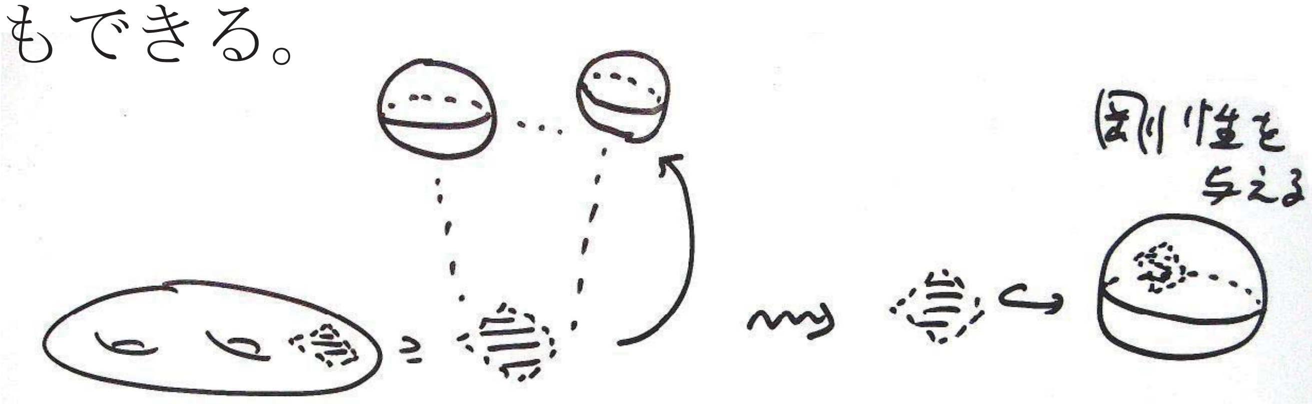
§3 の定理のセクション $\mathcal{N}^{\mathrm{ord}}_{\mathbb{Z}_p} \to \mathcal{S}_{\mathbb{Z}_p}$ より普遍的曲線 $\mathcal{X}$ 上に Frob の作用 付きの固有束

$$(\mathcal{P} \to \mathcal{X}, \nabla_{\mathcal{P}}, \sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{P}, \Phi_{\mathcal{P}})$$

ができる。これはリーマン面に対して構成した「特別な固有束」の p 進版 である。

この固有束データには、$\mathcal{X}$ 上の Zariski 局所化 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$ に対する二種類の'尋常ならざる剛性'が備わっている：

(i) $\mathcal{X}$ のモジュライの剛性 : $\mathcal{U}$ の無限小自己同型に対して Frob crystal $(\mathcal{P}, \nabla_{\mathcal{P}}, \Phi_{\mathcal{P}})$ は両立的だが、KS 射が同型 であるため σ は両立的ではない。つまり、$\mathcal{U}$ の無限小自己同型を抑制するという 剛性 を持っている。これにより、$\mathcal{U}$ たちは unique に貼り合うため $\mathcal{X}$ の変形＝モジュライの剛性と見ることもできる。



(ii) 射影束としての剛性：ただの $\mathbb{P}^1$ 束だと $\mathcal{U}$ 上では沢山の自己同型があり、従って $\mathcal{X}$ 上では沢山の貼り合わせ方があるが、「 $\mathcal{MF}^{\nabla}$ 対象」だと（ガロア表現 に対応しているということもあり）局所的な自己同型もなく $\mathcal{X}$ 上の貼り合わせ方は一通りしかない。

この二種類の剛性に類似した性質は以下に紹介する数体上の設定においても成立する。

数体 F の上に 一点抜き楕円曲線 X （＝双曲的な曲線）が与えてあるとする。すると、エタール基本群 をとることによって自然な完全系列ができる：

$$1 \to \Delta_X \to \Pi_X \to G_F \to 1$$

また F の任意の（簡単のため！）有限素点 $\mathfrak{p}$ においても F の $\mathfrak{p}$ 進完備化 $F_{\mathfrak{p}}$ に base-change することによって次のような自然な完全系列ができる：

$$1 \to \Delta_X \to \Pi_{X_{\mathfrak{p}}} \to G_{\mathfrak{p}} \to 1$$

すると、次のような 二種類の剛性 が成立：

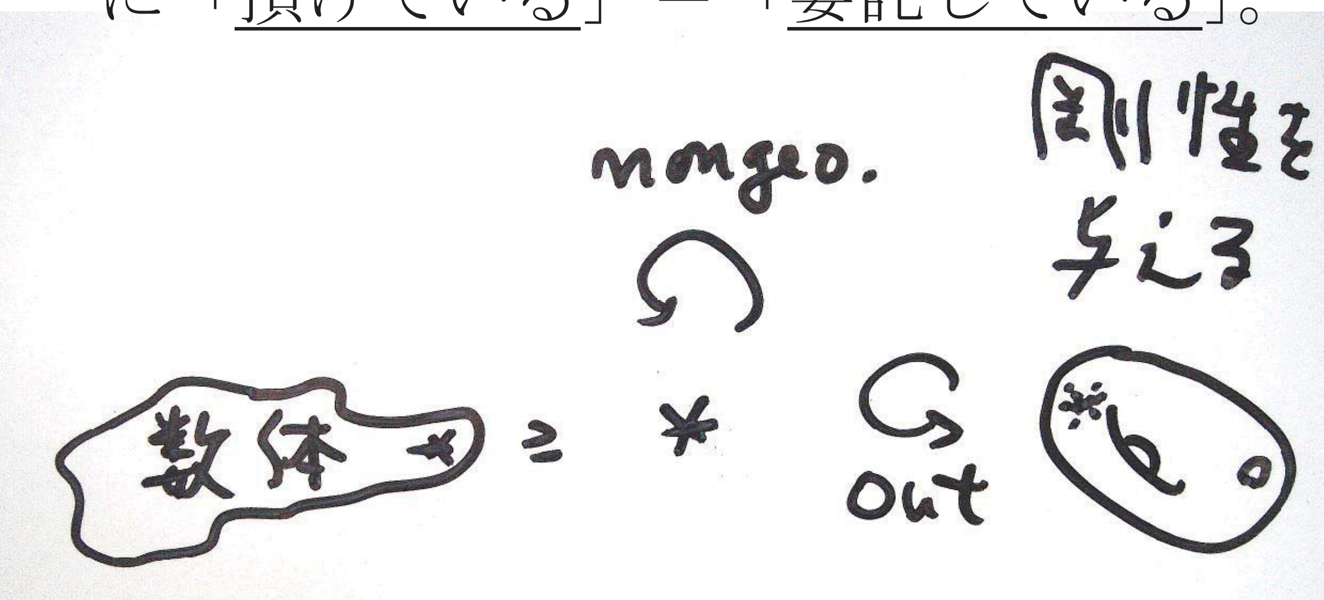
(i) 局所的・数論的モジュライの剛性：よく知られているように

$$G_{\mathfrak{p}}$$

は（G_F と違って：Neukirch-Uchida！）体の自己同型から生じない自己同型を持っている。局所類体論より、$G_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}$ の中に、乗法群 $F_{\mathfrak{p}}^{\times}$ が入っているが、その加法構造は $G_{\mathfrak{p}}$ の群論構造からは復元不可能！一方：

定理:X/F, $X_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}$ をそれぞれ副有限群 Π_X, $\Pi_{X_{\mathfrak{p}}}$ から、local/global 間の往復に両立的な形で復元するアルゴリズムが存在する。

つまり p 進体の固有束の話と同様に（剛性のない）$G_{\mathfrak{p}}$（$\leftrightarrow$ 正標数双曲線の局所化）は、その数論的モジュライを $\Pi_{X_{\mathfrak{p}}}$（$\leftrightarrow$ 固有束）に「預けている」＝「委託している」。



(ii) 整構造の剛性： p 進の話では Frob は '一種の圧縮' と見ることができ、従って crystal への Frob の作用は「一旦圧縮したもの $\xrightarrow{\sim}$ 圧縮前の状態」であることにより剛性をもたらしている。数体の場合、Frob に対応するものは「log-Frob」（一種の圧縮！）

$$
\begin{array}{ccccc}
\Pi_X & & & & \Pi_{X_\mathfrak{p}} \\
\downarrow & & \bigoplus_\mathfrak{p} F_\mathfrak{p}^\times & \curvearrowleft & \downarrow \\
G_F & \curvearrowright & \big\downarrow \mathfrak{log} & & G_\mathfrak{p} \\
 & & \bigoplus_\mathfrak{p} F_\mathfrak{p} & \curvearrowleft &
\end{array}
$$

$\mathfrak{log}(F_\mathfrak{p}^\times)$ は コンパクト なため、global な $\mathcal{O}_F$ の 近似 でも、局所化しても rigid！しかも 加法を忘れて（「$G_\mathfrak{p}$ のみ」）も 殆ど rigid!

注： $\mathfrak{log}$ は 環構造（や global な F）と 両立しない！従ってスキーム（環）の幾何の中では扱えないが、Galois と両立する ため、先程の定理により 絶対遠アーベル幾何 の枠組の中では扱える！

§5. エタール Θ 関数による標準持ち上げ

Witt 環や§3 で取り上げた 標準的持ち上げ の場合、個々の p^n/p^{n+1} の中に 正標数的な幾何 が含まれているが、混標数的な持ち上げでは、これらの「p^n/p^{n+1} の幾何たち」が '不思議な原理' で繋ぎ合わせられている。

$$\ldots \rightsquigarrow (p^{n+1}/p^{n+2}) \rightsquigarrow (p^n/p^{n+1}) \rightsquigarrow \ldots$$

IUTeich では、

通常のスキーム論/数体 $\leftrightarrow$ 正標数の幾何

なので、一応独立な「通常型数体上のスキーム論」たちを何らかの形で 繋ぎ合せたい。楕円曲線が退化する素点において q-parameter が定義されるが、その「通常型数論幾何」の中で Θ 関数 を作ることができる。すると、数体の idèle のような モノイド（= Frobenioid の理論）を使って

$$\text{現世代の } \Theta(q) \rightsquigarrow \text{次世代の } q$$

で繋ぎ合わせることができる。

つまり、

$$\cdots \rightsquigarrow q_{\text{現}} \setminus \Theta_{\text{現}} \rightsquigarrow q_{\text{次}} \setminus \Theta_{\text{次}} \rightsquigarrow \cdots$$

という形で「IU 的な持ち上げ」を構成する。

Θ 関数にはモノイド＝ divisor 的な「表示」だけでなく、ベキ乗根をとることによる「Kummer 型の表示」＝「エタール Θ」もある。このエタール＝ガロア系の表示を利用することにより、次の二種類の「恩恵」に与ることができる：

(i) $\mathfrak{log}$ と両立的に値をとることができる：l 等分点上の Θ 関数の値たち は大体

$$q^{j^2} \qquad (j = 0, \ldots, (l-1)/2)$$

のような形をしていて $\mathfrak{log}$ による標準的整構造 $\mathfrak{log}$-shell に掛けてやることによって 楕円曲線の Hodge-Arakelov 理論 で中心的な役割を果たす ガウス整構造 ができる。こうしてできる加群全体は H-A 理論における crystalline Θ-object の近似とも見ることができる。

つまり、こうして構成される整構造は、ちょうど p 進の理論における標準的 $\mathbb{P}^1$-束に対応している（＝の「遠アーベル版」）と見ることができる。

(ii) 数珠繋ぎの順序を置換する : これは「ガロアは $\mathfrak{log}$ と可換する」という現象に類似した現象である。一見して解消不可能かに見える「Θ 関数の数珠繋ぎの順序」を、ガロア系＝遠アーベル系の対象たちを扱うことにより 置換 することが可能になる。このような「置換可能描像」への変換は、古典的な積分

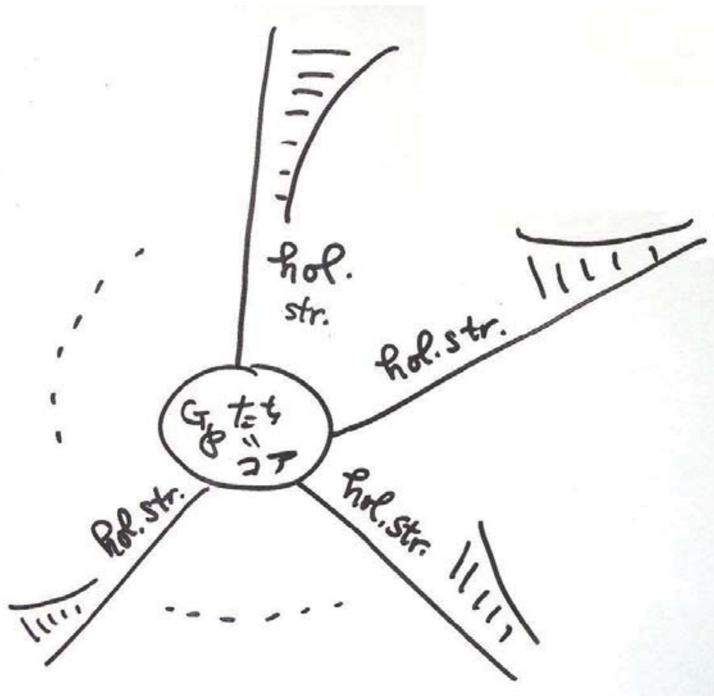
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

の計算における 極座標 への変換の「IU 的ガロア版」と見ることができる。このような「置換可能描像」は、

一種の「標準的分裂」

と見ることもでき、その分裂を可能にしているものは「$\mathfrak{log}$ 不変量」である（F, $F_{\mathfrak{p}}$ や Θ の）「遠アーベル系表示」である。

また置換可能描像に出てくる各々の「成分」は「Π_X や $\Pi_{X_\mathfrak{p}}$ による一個の 正則構造」であり、その正則構造たちは、$G_\mathfrak{p}$ たちという「下部実解析多様体」が成す「コア」で束ねられている。



上の話では「Θ による繋ぎ合わせの操作」を有限回施したものを考えたが、無限回施して、適切な形で 極限 をとると、標準的 Frob 持ち上げ の類似物が働く「楕円曲線付き数体の標準的持ち上げ」が出来上がる。この Frob 持ち上げの類似物を「微分する」ことによって diophantus 幾何において関心が持たれる「不等式」がすんなり従うと期待している。